**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»**

Г.А. ОБУХОВА

ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ

Методическое пособие

для студентов заочной формы обучения направления ПО

Рубцовск 2013

УДК 517.8

Обухова Г.А. Введение в дискретную математику: Методическое пособие для студентов заочной формы обучения направления ПО/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2013. - 33 с.

В пособии представлены задачи, примеры решений и краткие теоретические справки по основным разделам дискретной математики: множества, декартовы произведения, отношения, булевы функции. Для каждого типа задач предлагаются варианты для самостоятельного решения, приводятся подробные образцы решения задач.

Рассмотрено и одобрено на заседании НМС Рубцовского индустриального института
Протокол № 9 от 19.12.2013г.

Рецензент:
к.ф.-м.н., доцент Е.А. Дудник

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика является новым разделом математики, получившим интенсивное развитие в последние 20-30 лет в связи с появлением и использованием вычислительной техники. Понятия и результаты дискретной математики на первых порах довольно трудны для усвоения. Особую трудность представляет для студентов решение задач. Данное пособие имеет целью помочь студентам при выборе метода решения задач по дискретной математике и показать на примерах, как решаются такие задачи.

Английский философ и математик Дж. Буль разработал в 1854-м году алгебру логики, которая впоследствии стала теоретическим фундаментом современных ЭВМ.

Алгебра логики, называемая также алгеброй высказываний или булевой алгеброй, оперирует с величинами, которые удобно интерпретировать как высказывания, например:

«Я – студент»,

«Я хочу получить фундаментальное математическое образование»,

«Я не знаю, чего хочу»,

«Я очень любознателен».

Основное свойство всякого высказывания состоит в том, что оно может быть либо истинным, либо ложным (но не может быть истинным и ложным одновременно!).

Так, первое из приведенных высказываний, по-видимому, истинно, а если это не так, то наверняка истинно последнее высказывание, иначе что заставило бы вас читать эту брошюру?

Какое из оставшихся двух высказываний является истинным, а какое – ложным, вы решите самостоятельно, однако стоит заметить, что никакой ответ не является противопоказанием для изучения столь занимательного раздела математики.

Надеемся, что этот немного шутливый комментарий не сбил вас с толку и вы поняли, что, в общем случае, истинность того или иного высказывания определяется ситуацией. Так, высказывание «Я – студент» может быть истинным в устах одного человека, но ложным – в устах другого.

При рассмотрении высказываний нас будет интересовать главный вопрос: при каких условиях данное высказывание является истинным?

Для обозначения высказываний мы будем использовать большие буквы: X, Y, ….

Запись $X=1$, означает, что значение высказывания X есть истина, а запись $X=0$, что значение высказывания X - ложь.

Здесь 1 и 0 – суть логическая 1 и логический 0.

Итак, отвлекаясь от содержательной интерпретации, можно сказать, что алгебра логики оперирует с величинами, которые могут принимать одно из двух логических значений: 1 и 0, и эти величины называются логическими переменными.

Данное методическое пособие состоит из пяти глав. В начале каждой главы вводятся понятия, даются определения и формулировки теорем, используемых при выполнении заданий.

1. МНОЖЕСТВА

Множество – состоит из элементов. Принадлежность элемента a множеству M обозначается $a \in M$ ("a принадлежит M"), непринадлежность - $a \notin M$ или $a \overline{\in} M$.

Множество A называется ***подмножеством*** множества (обозначается $A \subseteq B$), если всякий элемент из A является элементом B (рис. 1). Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется ***строгим (собственным) подмножеством*** (обозначается $A \subset B$) (рис.1).

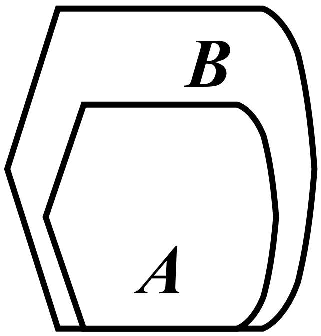

Рис. 1

Два определения равенства множеств:

I. Множества A и B ***равны*** *(A=B)*, если их элементы совпадают.

II. Множества A и B равны, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Множество, состояние из конечного числа элементов, называется ***конечным***, в противном случае – ***бесконечным*** (например, множества N, R – бесконечные множества). Число элементов в конечном множестве M называется его ***мощностью*** и обозначается $|M|$.

Множество мощности 0, т.е. не содержащее элементов, называется *пустым* (обозначается $\varnothing$): $|\varnothing|=0$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

***Способы задания множеств*:**

• ***Перечислением***, т.е. списком своих элементов. Списком можно задать лишь конечные множества. Обозначение списка – в фигурных скобках. Например, множество A устройств домашнего компьютера, состоящего из процессорного блока a, также периферийных устройств B (монитора b, клавиатуры c и принтера d), может быть представлено списком:

$$A=\{a, B\} \text{ или } A=\{a, b, c, d\}.$$

(Задание типа N=1, 2, 3,… - не список, но лишь допустимое условное обозначение.)

•***Порождающей процедурой***, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов. В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры. Например, множество всех целых чисел, являющихся степенями двойки M_{2^n}, $n \in N$, где N – множество натуральных чисел, (допустимое обозначение M_{2^n} = 1, 2, 4, 8, 16,…) может быть представлено порождающей процедурой, заданной двумя правилами, называемыми *рекурсивными*, или *индуктивными*:

а) $1 \in M_{2^n}$; б) если $m \in M_{2^n}$, то $2m \in M_{2^n}$.

•***Описанием характеристических свойств***, которыми должны обладать его элементы; обозначается:

$$M = \{ x | P(x) \} \text{или } M = \{ x : P(x) \}.$$

(“Множество M состоит из элементов x таких, что x обладает свойством P ”). Например, множество A периферийных устройств персонального компьютера PC может быть определено:

A={x: x – периферийное устройство персонального компьютера PC}.

Если свойство элементов множества M может быть описано коротким выражением, это упрощает его символьное представление. Например, множество всех натуральных четных чисел M_{2^n} может быть представлено:

$$M_{2^n} = \{x : x = 2n, n \in N\}.$$

Надежным способом точно описать свойство элементов данного множества является задание ***распознающей*** **(*разрешающей*)** процедуры. Она должна устанавливать для любого объекта x, обладает ли он данным свойством P (и, следовательно, принадлежит множеству) или нет.

1.1. Операции над множествами

Объединением множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B (рис. 2):

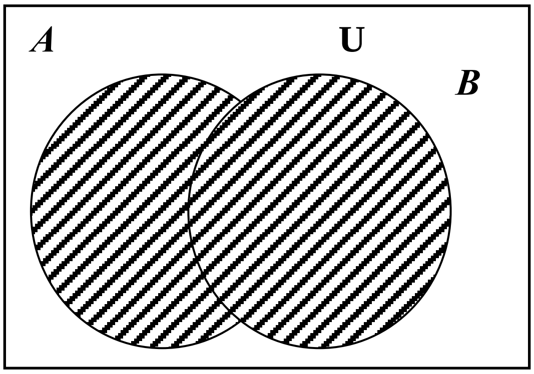

Рис. 2

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств А и B (обозначается $A \cap B$) называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A, и B (рис. 3):

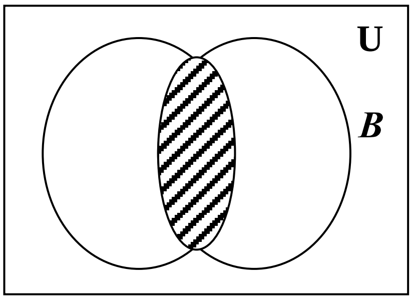

Рис. 3

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Объединение и пересечение произвольной совокупности множеств определяются аналогично. Символическая запись, например, для объединения: $A \cup B \cup C \cup D$;

$$\bigcup_{A \in S} A; \bigcup_{i=1}^{k} A_i; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i; \bigcup_{i \in 1} A_i.$$

Разностью множеств A и B (обозначается $A \setminus B$) называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B (рис 4):

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

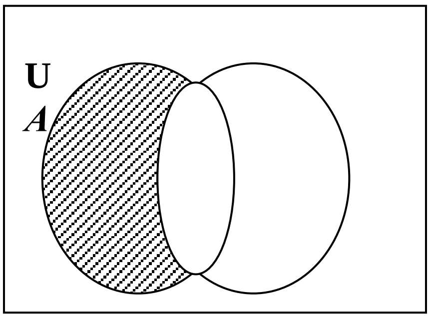

Рис. 4

Разность- операция строго двухместная и некоммутативная: в общем случае $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Пусть U – ***универсальное множество*** такое, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

Дополнением (до U) множества A (обозначается $\bar{A}$) называется множество всех элементов, не принадлежащих A (но принадлежащих U) (рис. 5):

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

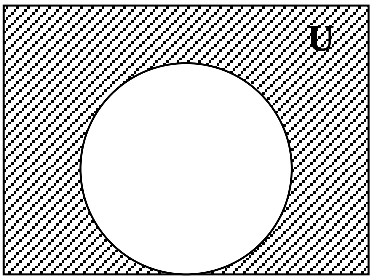

Рис. 5

Операция объединения, пересечения, дополнения $\{\cup, \cap, -\}$часто называют *булевыми операциями над множествами.*

Определение. Для множества *A* символ ß*(A*) обозначает семейство всех подмножеств множества *A*.

Определение. *Алгеброй Буля* называется множество ß*(A*) с операциями $\bigcap, \bigcup, '$ и двумя выделенными элементами 0=0, 1=*A*.

Предложение 1. *В алгебре Буля* <ß *(A*); $\bigcap, \bigcup, '$ 0, 1 > *справедливы следующие тождества:*

1. $\forall a, b \;\; a \bigcup b = b \bigcup a, \; a \bigcap b = b \bigcap a;$
2. $\forall a, b, c \quad (a \bigcup b) \bigcup c = a \bigcup (b \bigcup c), \; (a \bigcap b) \bigcap c = a \bigcap (b \bigcap c);$
3. $\forall a, b, c \quad (a \bigcap b) \bigcup c = (a \bigcup c) \bigcap (b \bigcup c),$
   $(a \bigcup b) \bigcap c = (a \bigcap c) \bigcup (b \bigcap c);$
4. $\forall a \quad a \bigcap a = a, \; a \bigcup a = a;$
5. $\forall a \quad a \bigcup a' = 1, \; a \bigcap a' = 0;$
   $0' = 1, \; 1' = 0$
6. $\forall a, b \quad (a \bigcup b) \bigcap a = a, \; (a \bigcap b) \bigcup a = a;$
7. $\forall a, b \quad (a \bigcup b)' = a' \bigcap b', \; (a \bigcap b)' = a' \bigcup b'.$

Доказательство. Для иллюстрации доказательства этих тождеств докажем только первый из законов дистрибутивности 3.

Итак, пусть *X*, *Y*, *Z* – произвольные подмножества множества *A*. Необходимо показать равенство множеств $(X \bigcap Y) \bigcup Z, (X \bigcup Z) \bigcap (X \bigcup Z)$.

Возьмем произвольный элемент *d* из множества $(X \bigcap Y) \bigcup Z$. Покажем, что *d* является элементом множества

$$(X \bigcup Z) \bigcap (Y \bigcup Z).$$

Действительно, из включения $d \in (X \bigcap Y) \bigcup Z$ следует, что справедливо, по крайней мере, одно из утверждений: $d \in (X \bigcap Y)$ или $d \in Z$. А из утверждения $d \in (X \bigcap Y)$ или $d \in Z$ следует, что справедливы два следующих утверждения:

$$d \in X \text{ или } d \in Z, \text{ и } d \in Y \text{ или } d \in Z.$$

Из $d \in X$ или $d \in Z$ заключаем, что $d \in X \bigcup Z$, а из $d \in Y$ или $d \in Z$ следует, что $d \in Y \bigcup Z$.

Таким образом, из нашего исходного включения $d \in (X \bigcap Y) \bigcup Z$ следует, что справедливы $d \in X \bigcup Z$, $d \in Y \bigcup Z$, т.е. $d \in (X \bigcup Z) \bigcap (Y \bigcup Z)$.

Возьмем теперь произвольный элемент *d* из множества

$$(X \bigcup Z) \bigcap (Y \bigcup Z).$$

Покажем, что *d* является элементом множества $(X \bigcap Y) \bigcup Z$.

Действительно, из включения $d \in (X \bigcup Z) \bigcap (Y \bigcup Z)$ получаем включения $d \in (X \bigcup Z)$, $d \in (Y \bigcup Z)$. Из $d \in X \bigcup Z$ получаем, что справедливо, по крайней мере, одно из утверждений: $d \in X$ или $d \in Z$. А из $d \in (Y \bigcup Z)$ заключаем, что $d \in Y$ или $d \in Z$. Если $d \in Z$, то, очевидно, $d \in (X \bigcap Y) \bigcup Z$. Если же $d \notin Z$, то тогда необходимо $d \in X$, $d \in Y$, и $d \in (X \bigcap Y)$. А из $d \in (X \bigcap Y)$ вновь имеем включение $d \in (X \bigcap Y) \bigcup Z$. В любом случае из

$d \in (X \bigcup Z) \bigcap (Y \bigcup Z)$ получаем включение $d \in (X \bigcap Y) \bigcup Z$. Равенство $(X \bigcap Y) \bigcup Z = (X \bigcup Z) \bigcap (Y \bigcup Z)$ доказано. Предложение доказано.

Тождества алгебры Буля можно установить с помощью так называемых кругов Эйлера.

Суть метода – множества *X, Y, Z* изображаем на плоскости диаграммой из трех кругов, и на этой диаграмме сначала определяем множество $(X \bigcap Y) \bigcup Z$, затем множество $(X \bigcup Z) \bigcap (Y \bigcup Z)$. При совпадении изображений имеем совпадение соответствующих множеств.

Определение. *Отображением*

$$\mu: \ A \Rightarrow B$$

множества *A* в множество *B* назовем некоторый закон (правило) μ, ставящий в соответствие каждому элементу множества *A* некоторые вполне определенные элементы множества *B*.

Отметим, что в этом определении отображения фактически определено *полное* отображение, т.е. такое, при котором все элементы множества *A* отображаются, или, говоря другими словами, область определения отображения μ - это все множество *A*. Отображение, не являющееся полным, еще называют *частичным.*

Тот факт, что элементу $a \in A$ при отображении μ соответствует элемент $b \in B$, обозначаем через $\mu(a)=b$. Элемент при этом называем *образом* элемента *a*, а элемент *a* называем *прообразом* элемента *b*.

Отображение μ: $A \Rightarrow B$ назовем *многозначным*, если в *A* существуют элементы, имеющие несколько образов. Отображение μ: $A \Rightarrow B$ назовем *однозначным,* если в *A* нет элементов, имеющих несколько образов.

Всюду далее мы рассматриваем только полные и однозначные отображения.

Определение. Отображение μ: $A \Rightarrow B$ назовем *взаимно однозначным*, если у каждого элемента из A существует точно один образ в B, а у каждого элемента из B существует точно один прообраз в A.

1.2. Числовые множества

Понятие о числе, сейчас для нас очень привычное, вырабатывалось очень медленно. На протяжении веков люди учились считать предметы. Число было свойством совокупности (множества) предметов и лишь посте пенно стало отвлечённым понятием. Так возникли ***натуральные*** числа.

Будем всегда обозначать буквой N множество натуральных чисел:

$$N = \{1,\ 2,\ 3, \ldots\}.$$

Новой ступенью стало введение отрицательных чисел. Система чисел расширилась — люди стали использовать ***целые*** числа:

$$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Необходимость измерения различных величин привела к следующему этапу в развитии понятия числа. Часто бывает, что выбранная единица не укладывается в измеряемой величине целое число раз. Тогда приходится делить единицу — так возникли ***простые дроби*** — числа вида $\frac{m}{n}$, где m, n — целые. Вместе с целыми числами дроби образуют множество ***рациональных*** чисел:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m,\ n \in Z;\ n \neq 0 \right\}.$$

Следует отметить, что дробные числа люди стали использовать гораздо раньше, чем отрицательные.

В дальнейшем выяснилось, что не всякую, например, длину можно выразить простой дробью. Ещё в V веке до н. э. греческие ученые обнаружили ***несоизмеримые*** отрезки. Например, если a — сторона какого-либо квадрата, b — его диагональ, то отношение $\frac{b}{a}$ не равно никакому рациональному числу. Действительно, по теореме Пифагора: $b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Поэтому $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2$. Но рационального числа с таким свойством нет.

Расширим множество рациональных чисел, добавив ***иррациональные*** числа, которые записываются бесконечными ***непериодическими*** десятичными дробями. Полученное множество называется множеством ***действительных*** чисел:

$$R = Q \cup \{\text{бесконечные непериодические дроби}\}.$$

Пока нам достаточно тех сведений о действительных числах, которые изучаются в школе. В частности, мы будем изображать действительные числа точками координатной прямой. Это возможно, так как между множеством М и множеством точек прямой можно установить взаимно однозначное соответствие. Прямая линия в этом случае называется ***числовой прямой.***

Между числовыми множествами имеются отношения включения:

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R.$$

1.3. Отношения

Отношения – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества. Наиболее изученными и чаще всего используемыми являются так называемые унарные и бинарные отношения.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие какого-то определенного признака *R* (свойства и т.п.) у элементов множества *M* (например, «быть белым» на множестве шаров в урне). Тогда все такие элементы *a* из множества *M*, которые отличаются данным признаком *R*, образуют некоторое подмножество в *M*, называемое унарным отношением *R*, т.е. $a \in R$ и $R \subseteq M$.

Бинарные (двухместные) отношения используются для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве *M* (так, на множестве людей могут быть заданы, например, следующие бинарные отношения: «жить в одном городе», «быть моложе», «быть сыном», «работать в одной организации» и т.п.). Тогда все пары *(a, b)* элементов из *M*, между которыми имеет место данное отношение *R*, образуют подмножество пар из множества всех возможных пар элементов $M \times M = M^2$, называемое бинарным отношением *R*, т.е.

$$(a,\ b) \in R, \text{ при этом } R \subseteq M \times M .$$

В общем случае могут рассматриваться *n – местные отношения*, например отношения между тройками элементов – трехместные (тернарные) отношения и т.д.

Под *n – местным отношением* понимают подмножество *R* прямого произведения *n* множеств: $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$. Говорят, что элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n (a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \ldots, a_n \in M_n)$ находятся в отношении *R*, если $(a_1, a_2 \ldots, a_n) \in R$. Если *n* – местное отношение *R* задано на множестве *M* своих элементов, т.е. $M_1 = M_2 = \ldots = M_n$, то $R \subseteq M^n$.

1.3.1. Бинарные отношения. Основные определения

Двухместным, или *бинарным*, отношением *R*называется подмножество пар $(a,b) \in R$ прямого произведения $M_1 \times M_2$, т.е. $R \subseteq M_1 \times M_2$. При этом множество M_1 называют областью определения отношения *R*, множество M_2 -

областью значений. Часто рассматривают отношения *R* между парами элементов одного и того же множества *M*, тогда $R \subseteq M \times M$. Если *a, b* находятся в отношении *R*, это часто записывается как *a R b*.

Пусть $R \subseteq A \times B$ определено в соответствии с изображением на рис. 6. *Область определения D(R)* и *область значений Q (R)* определяются соответственно:

$D(R) = \{a : (a,b) \in R\}$, $\mathrm{Q}(R) = \{b : (a,b) \in R\}$

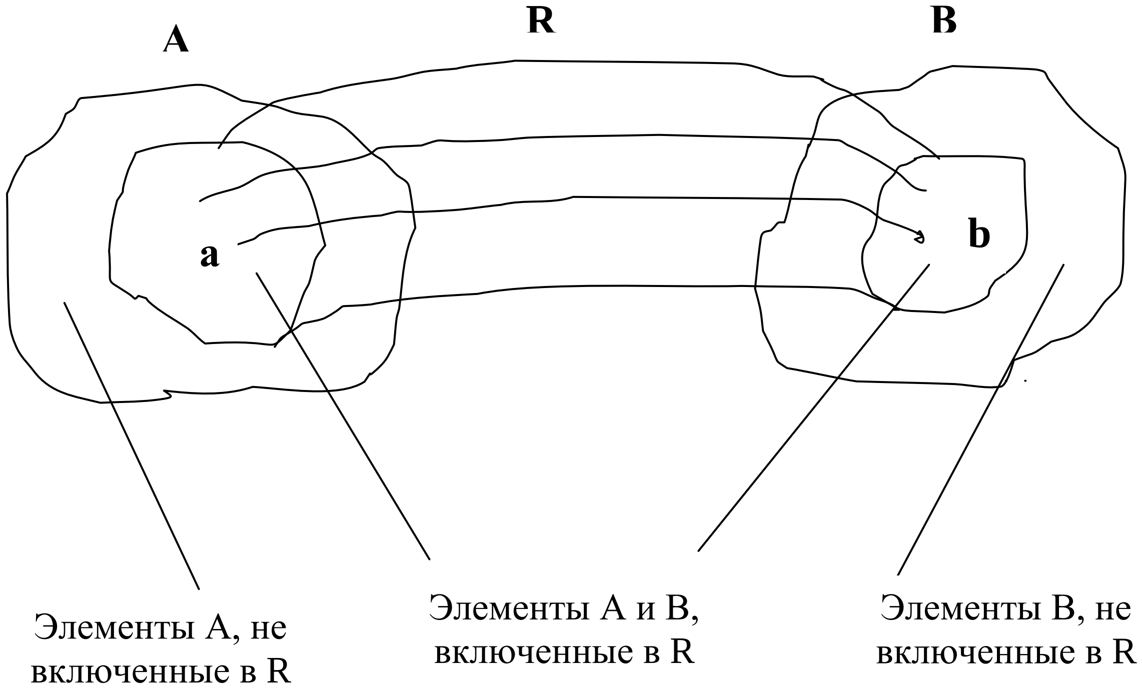

Рис. 6

Способы задания бинарных отношений – любые способы задания множеств (так как отношения определены выше как подмножества некоторых множеств – прямых произведений). Отношения, определенные на конечных множествах, обычно задаются:

1. ***Списком (перечислением) пар***, для которых это отношение выполняется. Например, *R={(a, b), (a, c), (b, d)}*.

2. ***Матрицей*** – бинарному отношению $R \subseteq M \times M$, где $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, соответствует квадратная матрица порядка *n*, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении *i-й* строки и *j-го* столбца, равен 1, если между a_i и a_j имеет место отношение *R*, или 0, если оно отсутствует:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если}\, a_i R a_i, \\ 0\ \text{в противном случае} \end{cases}$$

1.3.2. Свойства бинарных отношений

Пусть R – отношение на множестве M, $R \subseteq M \times M$. Тогда:

1) R – *рефлексивно*, если имеет место $a\ R\ a$ для любого $a \in M$ (например, отношение «жить в одном городе» – рефлексивно);

2) R – *антирефлексивно*, если не для какого $a \in M$ не выполняется $a\ R\ a$ (например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно);

3) R – *симметрично*, если $a\ R\ b$ влечет $b\ R\ a$ (например, отношение «работать на одной фирме) – симметрично);

4) R – *антисимметрично*, если $a\ R\ b$ и $b\ R\ a$ влекут $a = b$, т.е. ни для каких различающих элементов a *и* b $(a \neq b)$ не выполняется одновременно

$a\ R\ b$ и $b\ R\ a$ (например, отношения «быть сыном», «быть начальником» – антисимметричны);

5) R – *транзитивно*, если $a\ R\ b$ и $b\ R\ c$ влекут $a\ R\ c$ (например, отношения «быть моложе», «быть братом» – транзитивны).

1.3.3. Эквивалентность и порядок

Рассмотренные ниже отношения представляют собой формально определенные типы отношений, отличающиеся фиксированным набором свойств.

Отношением эквивалентности (или просто *эквивалентностью*) называют бинарное отношение на множестве, если оно рефлексивно, симметрично, транзитивно. Например, отношение «жить в одном городе» на множестве людей – эквивалентность.

Отношение эквивалентности имеет важную особенность: эквивалентность R разбивает множество M, на котором оно заданно, на не пересекающиеся множества так, что элементы одного и того же подмножества находятся в отношении R, а между элементами из разных подмножеств отношение R отсутствует. В таком случае говорят, что отношение R задает разбиение на множестве M, или систему классов эквивалентности по отношению R. Мощность этой системы называется индексом разбиения. В тоже время любое разбиение множества M на классы определяет некоторое отношение эквивалентности, а именно отношение «входить в один и тот же класс данного разбиения».

Отношением не строгого порядка (или *нестрогим порядком*) называют бинарное отношение на множестве, если оно рефлексивно, антисимметрично, транзитивно, и *отношением строгого порядка* (*строгим порядком*), если оно антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно. Оба эти отношения называются *отношениями порядка*. Например, отношения «быть старше» на множестве людей, «быть не больше» на множестве натуральных чисел – нестрогий порядок; отношения «быть моложе», «быть прямым потомком» на множестве людей – строгий порядок.

Элементы $a, b \in M$ *сравнимы по отношению порядка* R на M, если выполняется $a\,R\,b$ или $b\,R\,a$.

Множество M, на котором задано отношение порядка, может быть:

а) *полностью упорядоченным множеством*, если любые два элемента из M сравнимы по отношению порядка. В таком случае говорят, что отношение R задает полный порядок на множестве M. Например, отношение «быть не старше» задает полный порядок на множестве людей;

б) *частично упорядоченным множеством* – в противном случае. При этом говорят, что отношение R задает на множестве M частичный порядок. Например, отношение «быть начальником» задает на множестве сотрудников организации частичный порядок, так как, например, для пары сотрудников одного отдела данное отношение не выполняется: они не сравнимы по данному отношению.

1.3.4. Операции над бинарными отношениями

Так как отношения на M задаются подмножествами, $R \subseteq M_1 \times M_2$ (или $R \subseteq M^2$, если $M_1=M_2=M$), для них определимы те же операции, что и над множествами:

1. ***Объединение*** $R_1 \cup R_2$:

$R_1 \cup R_2 = \{(a,b) : (a,b) \in R_1 \text{ или } (a,b) \in R_2\}$.

2. ***Пересечение*** $R_1 \cap R_2$:

$R_1 \cap R_2 = \{(a,b) : (a,b) \in R_1 \text{ и } (a,b) \in R_2\}$.

3. ***Разность*** $R_1 \setminus R_2$:

$R_1 \setminus R_2 = \{(a,b) : (a,b) \in R_1 \text{ и } (a,b) \notin R_2\}$.

4. ***Дополнение*** R:

$\bar{R} = U \setminus R$, где $U = M_1 \times M_2$ (или $U=M^2$).

Кроме того, определяют другие операции над отношениями, в том числе:

5. ***Обратное отношение*** R^{-1}:

a R^{-1}b тогда и только тогда, когда $b\,R\,a$:

$R^{-1} = \{(a,b) : (b,a) \in R\}$.

Например, если R – «быть моложе», то R^{-1} – «быть старше», если R – «быть сыном», то R^{-1} – «быть отцом (или матерью)».

6. ***Составное отношение*** *(композиция)* $R_1 \circ R_2$.

Пусть заданы множества M_1, M_2, M_3 и отношения $R_1 \subseteq M_1 \times M_2$ и $R_2 \subseteq M_2 \times M_3$. Составное отношение действует из M_1 в M_2 посредством R_1, а затем из M_2 в M_3 посредством R_2, т.е.

$(a,b) \in R_1 \circ R_2$, если существует такое $c \in M_2$, что $(a,c) \in R_1$ и $(c,b) \in R_2$. На рис. 7 показаны множества M_1, M_2, M_3, в них – области определений $D(R_1)$, $D(R_2)$ и области значений $Q(R_1)$ и $Q(R_2)$, заштрихованные в разных направлениях для R_1 и R_2. Сегменты с двойной штриховкой на M_1, M_2, M_3 представляют собой $D(R_1 \circ R_2)$, $Q(R_1) \cap D(R_2)$ и $Q(R_1 \circ R_2)$ соответственно.

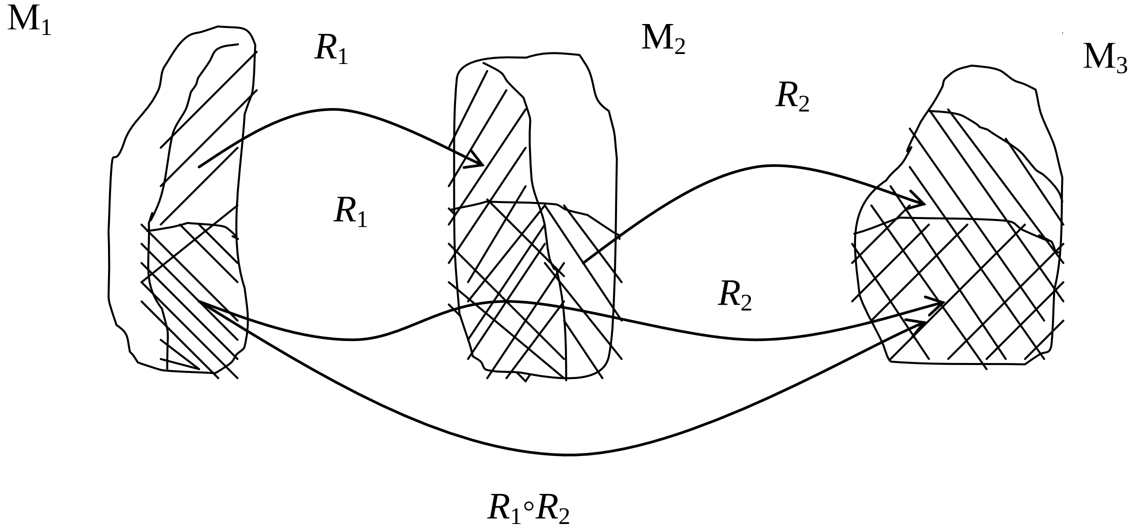

Рис. 7

В частности, если отношение R определенно на множестве $M, R \subseteq M^2$, то составное отношение

$R \circ R = \{(a,b) : (a,c), (c,b) \in R\}$.

Например, если R – «быть сыном», то $R \circ R$ – «быть внуком».

Обозначим $R \circ R = R^{(2)}$. Используя это обозначение, можно определить $R^{(n)}$ для любого $n \in N$, n > 1 следующим образом:

$$R^{(n)} = \{(a,b) : (a,c) \in R u (c,b) \in R^{(n-1)}\}.$$

7. ***Транзитивное замыкание*** R^o.

Транзитивное замыкание R^o состоит из таких и только таких пар элементов *a,b* из *M*, т.е. $(a,b) \in R^o$, для которых в *M* существует цепочка из *(k+2)* элементов $M, k \geq 0$: $a, c_1, c_2, \ldots, c_k, b$, между соседними элементами которой выполняется *R*:

$A\ R\ c_1,\ c_1\ R\ c_2, \ldots,\ c_k\ R\ b$, т.е.:

$$R^o = \{(a,b) : (a,c_1), (c_1,c_2), \ldots, (c_k,b) \in R\} \text{ (определение I).}$$

Унарная операция транзитивного замыкания R^o может быть также определена как бесконечное объединение:

$$R^\circ = R \cup R^{(2)} \cup R^{(3)} \cup \ldots \cup R^{(n)} \cup \ldots \text{ (определение II).}$$

Например, для отношения *R* – «быть сыном» составное отношение (композиция) $R \circ R = R^{(2)}$ – «быть внуком», $R \circ R \circ R = R^{(3)}$ – «быть правнуком» и т.д. Тогда объединение всех этих отношений есть транзитивное замыкание R^o - «быть прямым потомком».

Если отношение *R* транзитивно, то $R^o = R$. Например, транзитивное замыкание отношения *R* – «быть больше» совпадает с этим отношением, т.е. $R^o = R$.

8. ***Рефлексивное замыкание*** R^*.

Пусть тождественное отношение $E = \{(a, a) : a \in M\}$. Тогда

$$R^* = R^{\circ} \cup E .$$

Если R транзитивно и рефлексивно, то $R^*=R$.

*Процедура вычисления транзитивного замыкания** R^o для отношения $R \in M \times M$:

1) присвоить $R_1 \leftarrow R$;

2) вычислить $R_1 \cup R_1^{(2)} = R_1 \cup R_1 \circ R_1$; присвоить $R_2 \leftarrow R_1 \cup R_1^{(2)}$;

3) сравнить: $R_1=R_2$. Если $R_1 \neq R_2$. То присвоить $R_1 \leftarrow R_2$ и перейти к шагу 2. В противном случае – к шагу 4;

4) конец: $R_1=R_2=R^{\circ}$.

Правила построения матриц отношений $\overline{R}$, R^{-1}, $R^{(2)}$, R°, R^* *по* известной матрице отношения R:

• *Матрица дополнения* $\overline{R}$ - в матрице исходного отношения R заменить единицы нулями, а нули – единицами.

• *Матрица обратного отношения* R^{-1} – проставить в ней единицы, симметричные (относительно главной диагонали) соответствующим единицам исходной матрицы. Очевидно, что матрица симметричного отношения совпадает с матрицей его обратного отношения.

• *Матрица составного отношения* $R^{(2)}$ – для каждой единицы исходной матрицы отношения R, принадлежащей i-*й* строке, например единицы в j-*й* строке исходной матрицы.

• *Матрица транзитивного замыкания* R^* нетранзитивного отношения R – выполнить серию (одну или более) итераций, заключающихся в следующем:

а) для каждой единицы исходной матрицы отношения R, принадлежащей i-*й* строке, например единицы в j-*й* компоненте, т.е. для $c_{ij}=1$, в i-*й* строке вычисляемой матрицы проставляются единицы в тех k-*х* компонентах, в которых имеются единицы в i-*й* строке, а также в j-*й* строке исходной матрицы.

б) полученную матрицу отношения $R \cup R \circ R = R \cup R^{(2)}$ принимают за исходную и повторяют процедуру а), выполняя таким образом следующий цикл вычислений (построения матрицы), и т.д. до тех пор, пока матрица не перестанет изменяться, т.е. пока в некотором цикле вычислений исходная и вычисленная матрицы не совпадут.

Очевидно, что матрица транзитивного замыкания R^* совпадает с матрицей исходного отношения R, если отношение R транзитивно.

• *Матрица рефлексивного замыкания* R^* - построить матрицу транзитивного замыкания, а затем в полученной матрице заменить нули на главной диагонали, если таковые имеются, на единицы. Очевидно, что если отношение R рефлексивно, матрица рефлексивного замыкания R^* совпадает с матрицей транзитивного замыкания R°.

2. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Алгебра логика изучает различные логические зависимости между высказываниями и оперирует только двумя значениями: истинно- “1” и ложно- “0”.

В алгебре логики имеются три основные логические функции:

Логическое умножение, или конъюнкция “И”.

Логическое сложение, или дизъюнкция “ИЛИ”.

Логическое отрицание “НЕ”.

Пусть $U=\{u_1,\ u_2,\ u_m\}$ - исходный алфавит переменных (аргументов). Будем рассматривать функции $f\left(u_{i1},\ u_{i2},\ ...,\ u_m\right)\left(u_{i\nu}\neq u_{i\mu},\ \nu\neq\mu\right)$, аргументы которых определены на множестве E^2 = {0,1}, и такие, что $f\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\alpha_n\right)\in E^2$, когда $\alpha_i\in E^2\left(i=1,\ 2,\ ...,\ n\right)$. Эти функции будем называть функциями алгебры логики или булевыми функциями.

Из определения функции $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ следует, что для ее значения достаточно указать, какие значения функции соответствуют каждому из наборов значений аргументов, т.е. построим таблицу 1.

Таблица 1

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$	$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0 0 0 0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0 0 0 1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
0 0 1 0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
... ...	
1 1 1 1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

Из таблицы видно, что n переменных принимают 2^n различных значений.

Рассмотрим сущность основных логических функций.

1. $f_1(x)=0$ - константа 0.
2. $f_2(x)=1$ - константа 1.
3. $f_3(x)=x$ - тождественная функция.
4. $f_4(x)=x$ - логическое отрицание (x читается “не x” или обозначается “НЕ”). Эта операция преобразует истинное высказывание в ложное и ложное в истинное.

Структурная формула $F=\overline{a}$. Выход всегда противоположен входу. В электрической цепи логическое отрицание аналогично реле с размыкающими контактами, при подаче напряжения на реле контакты его размыкаются.

5. $f_5\left(x_1,\ x_2\right)=\left(x_1\,\&\,x_2\right)$ - конъюнкция x_1 и x_2 (читается “x_1 и x_2” или обозначается “И”). Вместо знака & употребляется знак “ ” или вообще знак опускается, т.е. пишут (x_1x_2). Эту функцию часто называют логическое умножение.

Эту операцию можно выполнить над двумя и более высказываниями. Математическое

выражение функции $F= ab$. Функция принимает значение 1 тогда и только тогда, когда аргумент a и аргумент b равны 1, т.е. оба значения истинны. При любой другой комбинации значений a и b получим 0.

Например: a=0, b=1, F=ab=0; a=1, b=0, F=ab=1, 0=0.

В электрической схеме элемент, реализующий логическую операцию “И”, по своему действию аналогичен цепи, состоящей из последовательно включенных контактов реле. Цепь замкнется тогда, когда замкнутся все контакты.

6. $f_6(x_1, x_2) = (x_1 \mathrm{V} x_2)$-дизъюнкция x_1 и x_2; читается “x_1 или x_2” или обозначается “ИЛИ”.

Эту функцию часто называют логическим сложением. Эта операция представляет собой сложное высказывание, которое истинно при истинности хотя бы одного из составляющих его высказываний и ложно, если все высказывания ложны. Составляющих высказываний может быть две и более. Структурная формула $F= a+b$. Функция принимает значение 0 тогда и только тогда, когда оба аргумента имеют значение 0, и принимают значение 1, когда или вход a, или вход b, или оба вмести имеют значение 1.

В электрической схеме функции “ИЛИ” соответствует параллельное включение контактов.

Кроме рассмотренных логических функций применяются производные от них с 5 более сложной логической связью. К ним относятся: функция “ИЛИ-НЕ”, называемая стрелкой Пирса, функция “И-НЕ”, называемая штрихом Шеффера, функция равнозначность (эквивалентность), функция импликация, функция запрет и др.

7. $f_7(x_1, x_2)=(x_1 \rightarrow x_2)$ импликация x_1 и x_2. Читается “из x_1 следует x_2”. Структурная формула записывается как $F = a + b$. Функция принимает значение 0 тогда и только тогда, когда аргумент a имеет значение 1, а аргумент b значение 0, т.е. сложное высказывание ложно только тогда, когда первое высказывание истинно, а второе ложно.

8. $f_8(x_1, x_2)=(x_1/x_2)$ - функция штрих Шеффера “И-НЕ” (инверсия произведения). Структурная формула записывается как $F = ab$. Функция принимает значение 0 тогда и только тогда, когда оба аргумента имеют значение 1, т.е. функция ложна только тогда, когда истинны оба входящие в нее высказывания.

В электрической цепи штрих Шеффера аналогичен параллельному включению двух или более размыкающих контактов. Цепь будет разомкнута тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны или ложны одновременно.

9. f_9 $(x_1, x_2)=x_1 \uparrow x_2$-стрелка Пирса “ИЛИ-НЕ” (инверсия суммы). Структурная формула записывается как $F = a + b$.

Функция принимает значение 1 тогда и только тогда, когда оба аргумента равны 0, т.е. функция истинна только тогда, когда ложны оба входящие в нее высказывания. В электрической цепи стрелка Пирса аналогична по своему действию последовательному включению двух или более размыкающих контактов. Цепь будет замкнута, если ни на одно реле не подан сигнал.

10. f_{10} (x_1, x_2)=$(x_1 \oplus x_2)$ - сложение x_1 и x^2 по mod 2. Функция принимает значение 1, если оба аргумента принимают разные значения, и значение 0, если значения аргументов равны.

Приведем значения описанных функций в таблицах 2, 3.

Таблица 2

x	0	1	x	$\overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Таблица 3

x_1 x_2	$(x_1 \& x_2)$	$(x_1 \mathrm{V} x_2)$	$(x_1 \to x_2)$	$(x_1 \oplus x_2)$	(x_1 / x_2)	$x_1 \uparrow x_2$
0 0	0	0	1	0	1	1
0 1	0	1	1	1	1	0
1 0	0	1	0	1	1	0
1 1	1	1	1	0	0	0

Заметим, что $(x_1\&x_2) = \min(x_1,x_2) = (x_1.x_2)$, $(x_1\mathrm{V}x_2) = \max(x_1,x_2)$.

3. СЛОЖНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

3.1. Формулы

С помощью введенных операций в алгебре логики из отдельных высказываний $x, y, \ldots$ можно строить сложные алгебраические выражения.

Определим правила образования логических выражений с помощью известных нам логических операций: [$\neg$, $\&$, V, $\oplus$, $\sim$, $/$, $\rightarrow$, $\uparrow$].

Такие выражения называются формулами над множеством этих операций.

Определение формулы введем по индукции.

1. Назовем формулой всякую логическую переменную (x), или логическую константу (0, 1), или логическое выражение вида: x, $\overline{x}$, $x\&y$, $x\mathrm{V}y$, $x\oplus y$, $x \rightarrow y$, x~y, x/y, $x \uparrow y$.

2. Всякое выражение вида x □ y, в котором x и y являются формулами, а □ - символ любой из рассматриваемых логических операций, также назовем формулой. Других формул нет.

Как и в числовой алгебре, операция умножения старше, чем все другие операции, кроме инверсии. Операция инверсии - самая старшая. Кроме того, обычно принимаются следующие соглашения для сокращения записи формул:

а) внешние скобки у формул опускаются;

б) формула (¬ x) записывается в виде $\overline{x}$, а формула $(x\&y)$ - в виде xy.

Эти соглашения позволяют, например, формулу

$((\neg x) \to ((x \& y) \sim z))$ переписать в виде: $x \to (xy \sim z)$.

Пример 1.

Выяснить, какие из перечисленных ниже выражений являются формулами над множеством логических операций:

а) $x \to y$; г) $(x \to (y \& (\neg x)))$;

б) $(x \&) \neg y$; д) $(x \& y) \neg z$;

в) $(y \to (x))$; е) $(\neg x \to z)$.

Пример 2.

Сколькими способами можно расставить скобки в выражении A, чтобы всякий раз получалась формула над множеством операций [¬,&,V,→,]?

а) $A = \neg x \to y \& x$;

б) $A = x \& y \& \neg\neg \mathrm{V} x$;

в) $A = x \to \neg y \to z \& \neg x$.

3.2. Как вычислить логическую формулу

Если знать значение каждого высказывания, входящего в алгебраическое выражение, то с помощью таблиц истинности можно найти значение этого логического выражения, т.е. узнать, при каких значениях входящих в него логических переменных само выражение является истинным или ложным.

Найдем значение алгебраического выражения $(x \mathrm{V} y) \cdot ((x \to y) \& (x \oplus y))$ при всех возможных значениях его компонент x и y, отобразим процесс вычисления с помощью приводимой ниже таблицы. Последовательность заполнения столбцов таблицы указана в нижней строке.

Построение таблицы начинаем с того, что выписываем в первых двух столбцах четыре возможные пары значений истинности для высказываний x и y. После этого записываем в верхней строке наше составное высказывание, оставляя место между символами с тем, чтобы можно было заполнять столбцы под ними:

x	y	$(\bar{X} \mathrm{V} \bar{Y})((X \to Y) \& (X \oplus Y))$
0	0	1110 0100 000
0	1	1101 0111 011
1	0	0110 1000 110
1	1	0001 1110 101
шаг		2325 1314 131

Воспроизводим значение истинности для x и y в столбцах, расположенных под соответствующими символами в нашем составном высказывании.

Этим завершается первый шаг вычисления.

Далее по значениям переменных x и y заполняем столбцы, помеченные символами x и y , выполняя тем самым самую старшую операцию (шаг 2).

Далее, в соответствии с порядком, указанным скобками, заполняются столбцы, помеченные символами V, → , ⊕ (шаг3). При этом заполнение осуществляется согласно определению соответствующих операций.

Наконец, заполняем еще два столбца: сначала столбец, помеченный символом “&” (шаг 4), затем - столбец, помеченный символом ”~“ (шаг 5). Столбец, помеченный цифрой 5, и первые два столбца таблицы (*x*, *y*) образуют таблицу истинности для рассматриваемого выражения.

Из нее мы узнаем, при каких значениях своих логических переменных исследуемое выражение является истинным или ложным.

Найдем значение логического выражения, зависящего от трех переменных, при различных значениях этих переменных $(x \sim y) \& (y \oplus z)$.

Прежде всего нужно выписать все возможные значения логических переменных *x, y, z*; 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, ….,111.

Теперь можно перейти к построению таблицы истинности заданного выражения:

x y z	$(x \sim y) \& (y \oplus z)$
000	1 0 0
001	1 1 1
010	0 0 1
011	0 0 0
100	0 0 0
101	0 0 1
110	1 1 1
111	1 0 0
Шаг №	1 3 2

В этой таблице, в столбце, помеченным цифрой 3, перечислены значения логического выражения при всех возможных значениях входящих в него переменных.

Пример 3

Построить таблицы значений следующих логических выражений:

1) $(x \to y) \& (y \to x)$;
2) $(x \& y) \to y$;
3) $y \to (x \vee y)$;
4) $((x \to z) \sim (x \vee y)$;
5) $x \to (y \vee z)$;
6) $(x \vee y) \& (x \to z)$;
7) $(x \vee y) \& (y \vee z)$;
8) $x \& y$;
9) $(x \to x) \vee (x \to x)$;
10) $(x \& y) \& z$;
11) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to y))$;
12) $(x \vee y) \sim (z \& R)$;
13) $(x \& y) \to (x \& (y \vee z))$;
14) $(x \& y) \& (x \vee y)$;
15) $((x \vee y)) \vee (x \& z) \downarrow (x \sim y)$;
16) $x \to (z \sim (y \oplus xz))$;
17) $(((x / y) \downarrow z) / y) \downarrow z$;
18) $(x \to y) \oplus ((y \to z) \oplus (z \to x))$.

4. ТОЖДЕСТВА

Имеем два высказывания, имеющие один и тот же смысл: «неверно, что x и y оба ложны» и «хотя бы одно из высказываний x и y истинно».

Построим таблицы истинности для соответствующих логических выражений:

x	y	$x\&y$	$y \vee x$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Последние два столбца оказались одинаковыми. Это означает, что при любых значениях высказываний x и y выражения ($x\&y$) и $x \vee y$ принимают одинаковое значение. Такие логические выражения будем называть равносильными или тождественными.

Любые два равносильных выражения имеют одинаковый содержательный смысл, выраженный разными словами. Кроме того, равносильность двух данных выражений можно проверить с помощью таблиц истинности.

Ниже приводятся простейшие эквивалентности (равносильности), которыми можно пользоваться как правилами, например, при упрощении сложных логических выражений.

Эти равносильности надо запомнить:

1) $x\&y=y\&x$;
2) $x \vee y=y \vee x$;
3) $(x\&y)\&z=x\&(y\&z)$;
4) $(x \vee y) \vee z=x \vee (y \vee z)$;
5) $x\&(y \vee z)=(x\&y) \vee (x\&z)$;
6) $x \vee (y\&z)=(x \vee y)\&(x \vee z)$;
7) $x\&x=x$;
8) $x \vee x=x$;
9) $(x\&y)=x \vee y$ (правило Де Моргана);
10) $(x \vee y) = x \& y$ (правило Де Моргана);
11) $x = x$;
12) $x \& x = 0$;
13) $x \vee x =1$;
14) $x\&0-0$;
15) $x \vee 1=1$;
16) $x\&1=x$;
17) $x \vee 0=x$;
18) $x \vee (x\&y)=x$ (правило поглощения);
19) $x\&(x \vee y)=x$ (правило поглощения);
20) $x \&(y \oplus z) = (x \& y) \oplus (x\&z)$;
21) $x\rightarrow y = x \vee y$;
22) $x \oplus y = x\overline{y} \vee \overline{x}y$;
23) $x \sim y = xy \vee \overline{x}\,\overline{y}$.

С помощью тождеств можно упрощать сложные логические выражения подобно тому, как упрощаются выражения в числовой алгебре.

4.1. Как проверить логическое тождество

Многие задачи в алгебре логики сводятся к проверке тождеств. Такая проверка может осуществляться несколькими способами.

1 способ основывается на построении таблиц истинности формул, проверяемых на логическое равенство. Этим способом можно воспользоваться, если исследуемые формулы зависят не более чем от трех- четырех переменных и имеют не слишком громоздкую структуру.

С помощью таблиц истинности выяснить, какие из приведенных ниже формул являются тождественно истинными или тождественно ложными.

1) $(x\rightarrow y)\rightarrow((x\mathrm{V}z)\rightarrow(y\mathrm{V}\neg z))$;

2) $((x \oplus y) \sim \bar{z}) \,\&\, (x\rightarrow y\bar{z})$;

3) $((\bar{x}\mathrm{V}\bar{y}) \uparrow (x \oplus \bar{y})) \oplus ((\overline{x \rightarrow \bar{y}})\rightarrow(\bar{x}\mathrm{V}y))$;

4) $((x\mathrm{V}\bar{y})z \rightarrow((x \sim z) \oplus y)) \,\&\, (x(yz))$.

Тождественно истинные (ложные) формулы в последнем столбце таблицы истинности имеют только 1(0).

С помощью таблиц истинности выяснить, эквивалентны ли формулы A и B:

5) $A=((x\mathrm{V}y)\mathrm{V}z)\rightarrow((x\mathrm{V}y)\&(x\mathrm{V}z))$, $B=x\sim y$;

6) $A=(x\rightarrow y)\rightarrow z)$, $B=x\rightarrow(y\rightarrow z)$;

7) $A=((x \oplus y))\rightarrow(x\mathrm{V}y) \,\&\, ((\bar{x} \rightarrow y)\rightarrow(x \oplus y))$, $B=x\uparrow y$;

8) $A=\overline{\left(\left(x\rightarrow y\right)\mathrm{V}\left(x\rightarrow z\right)y\right)}$, $B=(\bar{x}y)(y\rightarrow x\bar{z})$.

2 способ состоит в упрощении исследуемых формул с помощью тождественных преобразований. При этом следует стремиться преобразовать данное логическое выражение к формуле над множеством основных логических операций $[\neg,\&,V]$.

Если нужно проверить тождественное равенство двух логических выражений, то, упрощая их, пытаемся получить формулы одинакового вида. Если одинаковые формулы получить не удается, не следует делать вывод о неверности исследуемого тождества. В этом случае можно прибегнуть к построению таблиц истинности полученных простых выражений или к логическому анализу.

Для опровержения тождественного равенства достаточно указать хотя бы один набор значений переменных, на котором формулы принимают разные значения.

С помощью логических преобразований проверить справедливость следующих равенств: $x\mathrm{V}(y\sim z)=(x\mathrm{V}y)(x\mathrm{V}z)$.

Логическую операцию ~ в левой части равенства заменим в соответствии с тождеством 23: $x\mathrm{V}yz\mathrm{V}yz=(x\mathrm{V}y) \sim (x\mathrm{V}z)$.

В первой части такую же операцию заменяем аналогичным образом, имея в виду, что в роли переменных, соединяемых этой операцией, здесь выступают целые скобки: $x\mathrm{V}yz\mathrm{V}yz=(x\mathrm{V}y)(x\mathrm{V}z)\mathrm{V}(x\mathrm{V}y)(x\mathrm{V}z)$.

Инверсии над скобками в правой части убираем по правилу Де Моргана (тождество 10):

$$x \mathrm{V} yz \mathrm{V} yz=(x \mathrm{V} y)(x \mathrm{V} z) \mathrm{V} xyxz.$$

В правой части перемножаем уравнение в скобках (тождество 4):

$$x \mathrm{V} yz \mathrm{V} yz=x \mathrm{V} xy \mathrm{V} xz \mathrm{V} yz \mathrm{V} xyxz.$$

По правилу поглощения (18) удаляем второй и третий члены и по правилу (7) упрощаем последний член в правой части:

$$x \mathrm{V} yz \mathrm{V} yz=x \mathrm{V} yz \mathrm{V} xyz.$$

Умножим последнее слагаемое левой части на тождественно истинное выражение ($x \mathrm{V} \neg x$), это позволяют сделать тождества 13 и 16 и получим:

$$x \mathrm{V} yz \mathrm{V} xyz \mathrm{V} xyz=x \mathrm{V} yz \mathrm{V} xyz.$$

И, наконец, выполнив поглощение, докажем требуемое тождество:

$$x \mathrm{V} yz \mathrm{V} xyz=x \mathrm{V} yz \mathrm{V} xyz.$$

Можно доказать тождество иначе.

Имеем равенство $x \mathrm{V} yz \mathrm{V} xyz=x \mathrm{V} yz \mathrm{V} xyz$. Проанализируем это равенство. Поскольку слева стоит логическая сумма, легко указать наборы значений переменных, на которых эта сумма обращается в нуль это наборы, на которых обращается в нуль каждое слагаемое. А, именно, первое слагаемое обращается в нуль при x=0, второе – при y=0 или z=0, третье - y=1 или z=1. Все условия могут выполняться одновременно только в двух ситуациях, а именно: когда $x = y = z = 0$ или $x = y = z = 0$. Другими словами, формула в левой части равенства обращается в нуль на наборах: 001 и 010.

Проанализировав аналогично правую часть равенства, также получим условия, при которых она обращается в нуль: $x = y = z = 0$ или $x = y = z = 0$. Условия те же. Это свидетельствует о тождественном равенстве исследуемых формул. В данном случае тождество доказано с помощью логического анализа упрощенных формул.

Упрощая формулы с помощью тождественных преобразований, проверьте, справедливы и следующие тождества:

9) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;

10) $x \& (y \sim z)=(x \& y) \sim (x \& z)$;

11) $x \to (y \mathrm{V} z) = (x \to y) \mathrm{V} (x \to z)$;

12) $x \to (y \& z) = (x \to y) \& (x \to z)$;

13) $x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$;

14) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

Используя основные эквивалентности, докажите равносильность формул A и B, когда:

15) $A = (\bar{x} \& z) \mathrm{V} (x \& \bar{y}) \mathrm{V} (x \& \bar{z})$, $B = x \& (\overline{y \& z}) \mathrm{V} \bar{x} \& z$;

16) $A = (x \to y) \to ((x \& \bar{y}) \oplus (x \sim \bar{y}))$, $B = (x \mathrm{V} y) \& (\bar{x} \mathrm{V} \bar{y})$;

17) $A = x \to (x \& y \to ((x \to y) \to y) \& z)$, $B = y \to (x \to z)$;

18) $A=\overline{\left(\left(x\to y\right)\mathrm{V}\left(\left(x\to z\right)y\right)\right)}$, $B=\left(x\bar{y}\right)\left(\bar{y}\to x\bar{z}\right)$.

Покажите, что для формулы A нельзя построить тождественную ей формулу над множеством операций s, где

19) $A = x \oplus y$, s = [&];

20) $A = x \mathbin{\&} y$, $s = [\to]$;

21) $A = x \vee y$, $s = [\sim]$.

Построить для формулы A тождественную ей формулу над множеством операций s , если:

22) $A = x \to y$, $s = [\neg\, ;\, \&]$;

23) $A = x \vee y$, $s = [\to]$;

24) $A = x \sim y$, $s = [\to\, ;\, \&]$;

25) $A = xy$, $x = [\uparrow]$.

5. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вариант 1.

1. Найти объединение, пересечение, разность множеств *A* и *B*:

а) $A = \{1;2;3;5;7\}$, $B = \{4;2;1;6\}$;

б) $A = \{x / x \in [-\infty;7]\}, B = \{x / x \in (3;+\infty]\}$

2. Построить диаграммы Эйлера для правой и левой частей равенства.

$A \cup (B \backslash C) = A \cup B$.

3. Пусть отношение $R \subseteq M \times M$ задано матрицей, $M = \{1,2,3,4\}$. Определить матрицы отношений $R, \overline{R}, R^{-1}, R^{(2)}, R^{\circ}, R*$. Каковы свойства исходных и полученных отношений?

R	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	0	1
3	1	1	0	0
4	0	1	0	0

4. Проверить правильность рассуждения (двумя способами):

Я выхожу из дома либо поздно, либо вовремя. Если я выхожу из дома вовремя, то сразу же сажусь в автобус. Если я выхожу из дома поздно, то я не смогу сесть в переполненный автобус. Если я сажусь в автобус сразу же, то успеваю на занятия. Следовательно, я успеваю на занятия только тогда, когда выхожу из дома вовремя.

Вариант 2.

1. Найти объединение, пересечение, разность множеств A и B:

а) $A = \{8;10;11;12;1\}, B = \{4;5;2;10\}$;

б) $A = \{x / x \in [-8;1]\}, B = \{x / x \in (-\infty;-3]\}$

2. Построить диаграммы Эйлера для правой и левой частей равенства.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

3. Пусть отношение $R \subseteq M \times M$ задано матрицей, $M = \{1,2,3,4\}$. Определить матрицы отношений $R, \overline{R}, R^{-1}, R^{(2)}, R^{\circ}, R*$. Каковы свойства исходных и полученных отношений?

R	1	2	3	4	5
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0
5	0	1	1	0	1

4. Проверить правильность рассуждения (двумя способами):

Если завтра будет холодно и рукав будет почищен, то я надену теплое пальто. Завтра будет холодно, а рукав не будет почищен. Следовательно, я не надену теплое пальто.

Вариант 3.

1. Найти объединение, пересечение, разность множеств А и В:

а) $A = \{14;15;17;20\}, B = \{10;11;7;15;20\}$;

б) $A = \{x / x \in [-\infty;2]\}, B = \{x / x \in (-3;+\infty]\}$;

2. Построить диаграммы Эйлера для правой и левой частей равенства.

$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

3. Пусть отношение $R \subseteq M \times M$ задано матрицей, $M = \{1,2,3,4\}$. Определить матрицы отношений $R, \overline{R}, R^{-1}, R^{(2)}, R^{\circ}, R^*$. Каковы свойства исходных и полученных отношений?

R	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	1	0	1

4. Проверить правильность рассуждения (двумя способами):

Если Иван переутомился или болен, то он раздражается и у него болит голова. Если у него болит голова, то он пьет лекарство от головной боли, Иван сегодня не принимал лекарство от головной боли. Следовательно, Иван не болен.

Вариант 4.

1. Найти объединение, пересечение, разность множеств А и В:

а) $A = \{1;4;5;7;8;2\}, B = \{8;2;3;5\};$

б) $A = \{x / x \in [-5;2]\}; B = \{x / x \in (-2;+\infty]\};$

2. Построить диаграммы Эйлера для правой и левой частей равенства.

$A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$.

3. Пусть отношение $R \subseteq M \times M$ задано матрицей, $M = \{1,2,3,4\}$. Определить матрицы отношений $R, \overline{R}, R^{-1}, R^{(2)}, R^{\circ}, R^*$. Каковы свойства исходных и полученных отношений?

R	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	5
2	0	1	0	0	1
3	1	0	1	1	0
4	0	1	0	1	0
5	0	0	0	0	1

4. Проверить правильность рассуждения (двумя способами):

Если Иван приходит домой не поздно и в хорошем настроении, то он смотрит телевизор. Когда он смотрит телевизор, то всегда что-нибудь ест. Иван пришел домой не поздно и ничего не ест. Следовательно, он пришел домой в плохом настроении.

Вариант 5.

1. Найти объединение, пересечение, разность множеств А и В:

а) $A = \{15;17;20;25;4\}, B = \{21;22;25\};$

б) $A = \{x / x \in [-\infty;5]\}; B = \{x / x \in (-4;+\infty]\}$.

2. Построить диаграммы Эйлера для правой и левой частей равенства.

$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

3. Пусть отношение $R \subseteq M \times M$ задано матрицей, $M = \{1,2,3,4\}$. Определить матрицы отношений $R, \overline{R}, R^{-1}, R^{(2)}, R^{\circ}, R^{*}$. Каковы свойства исходных и полученных отношений?

R	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	1	0	0	1

4. Проверить правильность рассуждения (двумя способами):

Если он обладает большими знаниями или удачлив, то он добьется цели. Если он не будет обладать большими знаниями, то он не сможет быть удачливым. Следовательно, если он не обладает большими знаниями, то он не добьется цели.

Вариант 6.

1. Найти объединение, пересечение, разность множеств А и В:

а) $A = \{12;13;15;17;22\}, B = \{11;12;22;23\}$;

б) $A = \{x / x \in [-7;2]\}, B = \{x / x \in (-1;+\infty]\}$.

2. Построить диаграммы Эйлера для правой и левой частей равенства.

$(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$.

3. Пусть отношение $R \subseteq M \times M$ задано матрицей, $M = \{1,2,3,4\}$. Определить матрицы отношений $R, \overline{R}, R^{-1}, R^{(2)}, R^{\circ}, R^{*}$. Каковы свойства исходных и полученных отношений?

R	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	1	0	0	0
3	0	0	0	0
4	1	0	1	0

4. Проверить правильность рассуждения (двумя способами):

Если он будет обладать большими знаниями и будет удачливым, то он добьется цели. Если он будет удачливым, то он не сможет обладать большими знаниями. Следовательно, если он не добьется цели, то он не обладает большими знаниями.

Вариант 7.

1. Найти объединение, пересечение, разность множеств А и В:

а) $A=\{3;2;1;5;-2\}, B=\{4;1;5;7;9\}$;

б) $A=\{x/x\in[-\infty;-6]\}, B=\{x/x\in(-1;+\infty]\}$.

2. Построить диаграммы Эйлера для правой и левой частей равенства.

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C).$$

3. Пусть отношение $R\subseteq M\times M$ задано матрицей, $M=\{1,2,3,4,5\}$. Определить матрицы отношений $R,\overline{R},R^{-1},R^{(2)},R^{\circ},R*$. Каковы свойства исходных и полученных отношений?

R	1	2	3	4	5
1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	1	0	1	0	1
5	0	1	0	0	0

4. Проверить правильность рассуждения (двумя способами):

Если Василий победит на выборах, он будет доволен, а если он будет доволен, то он плохой борец в предвыборной компании. Но если он провалится на выборах, то потеряет доверие партии. Он плохой борец в предвыборной компании, если он потеряет доверие партии. Если он плохой борец в предвыборной компании, ему следует выйти из партии. Василий или победит на выборах, или провалится. Следовательно, ему нужно выйти из партии.

Вариант 8.

1. Найти объединение, пересечение, разность множеств А и В:

а) $A=\{15;18;20;21;22;13\}, B=\{36;30;17;18;20\}$;

б) $A=\{x/x\in[2;10]\}, B=\{x/x\in(-10;3]\}$.

2. Построить диаграммы Эйлера для правой и левой частей равенства.

$$A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash B)\cup(A\cap \mathrm{C}).$$

3. Пусть отношение $R \subseteq M \times M$ задано матрицей, $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Определить матрицы отношений $R, \overline{R}, R^{-1}, R^{(2)}, R^{\circ}, R*$. Каковы свойства исходных и полученных отношений?

R	1	2	3	4	5
1	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1
4	1	0	0	1	0
5	0	1	0	0	1

4. Проверить правильность рассуждения (двумя способами):

Если цены высоки, то и заработная плата высока. Цены высоки, или применяется регулирование цен. Если применяется регулирование цен, то нет инфляции. Наблюдается инфляция. Следовательно, заработная плата высока.

Вариант 9.

1. Найти объединение, пересечение, разность множеств A и B:

а) $A = \{41; 42; 22; 21; 5;\}, B = \{-8; -1; 12; 5; 41\}$;

б) $A = \{x / x \in [-\infty; 4]\}, B = \{x / x \in (-2; +\infty]\}$.

2. Построить диаграммы Эйлера для правой и левой частей равенства.

$(A \backslash B) \cup (A \cap C) = A \backslash (B \backslash C)$.

3. Пусть отношение $R \subseteq M \times M$ задано матрицей, $M = \{1,2,3,4\}$. Определить матрицы отношений $R, \overline{R}, R^{-1}, R^{(2)}, R^{\circ}, R*$. Каковы свойства исходных и полученных отношений?

R	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	5
2	0	1	0	0	1
3	1	0	1	1	0
4	0	1	0	1	0
5	0	0	0	0	1

4. Проверить правильность рассуждения (двумя способами): Я отдам свой ваучер на свое предприятие только тогда, когда я буду уверен в себе и будет согласна жена. Жена согласна отдать мой ваучер на мое предприятие, но я не отдал ваучер на свое предприятие, а решил повременить. Следовательно, я не уверен в себе.

Вариант 10.

1. Найти объединение, пересечение, разность множеств А и В:

а) $A=\{0;-2;1;-7;4;\}, B=\{-1;2;-7;-5;5\}$;

б) $A=\{x / x\in[-7;21]\}, B=\{x / x\in(4;+\infty]\}$.

2. Построить диаграммы Эйлера для правой и левой частей равенства.

$$(A\setminus C)\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C.$$

3. Пусть отношение $R\subseteq M\times M$ задано матрицей, $M=\{1,2,3,4\}$. Определить матрицы отношений $R, \overline{R}, R^{-1}, R^{(2)}, R^{\circ}, R^{*}$. Каковы свойства исходных и полученных отношений?

R	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	1	0	1

4. Проверить правильность рассуждения (двумя способами):
Если в результате эксперимента получен неверный результат, то либо в теоретических расчетах есть ошибка, либо эксперимент был поставлен неправильно. Не могут быть одновременно и ошибка в теоретических расчетах, и неправильно поставленный эксперимент. Если в теоретических расчетах нет ошибки, то эксперимент поставлен правильно. Следовательно, в результате эксперимента получен верный результат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириллова Г.А. Логический букварь методические указания по курсу «Дискретная математика» для студентов факультета среднеспециального образования, РИИ, 2004.
2. Кириллова Г.А. Введение в теорию множеств: Методические указания для студентов направления 080200 «Менеджмент» дневной формы обучения / РИИ, 2012.
3. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.: ил. – (Учебная литература для вузов).

Обухова Галина Александровна

ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ

Методическое пособие
для студентов заочной формы обучения направления ПО

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 24.12.13. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 2,06. Тираж 20 экз. Зак. 131241. Рег. № 93.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.